Probability & Statistics (1)

# Combinatorial Analysis I

**Asst. Prof. Chan, Chun-Hsiang**

*Master program in Intelligent Computing and Big Data, Chung Yuan Christian University, Taoyuan, Taiwan*
*Undergraduate program in Intelligent Computing and Big Data, Chung Yuan Christian University, Taoyuan, Taiwan*
*Undergraduate program in Applied Artificial Intelligence, , Chung Yuan Christian University, Taoyuan, Taiwan*

# Outlines

1. Review
2. Introduction
3. Counting Principle
4. Permutations
5. Combinations
6. Multinomial Coefficient
7. The Number of Integer Solutions of Equations
8. [#2] Assignment
9. Question Time

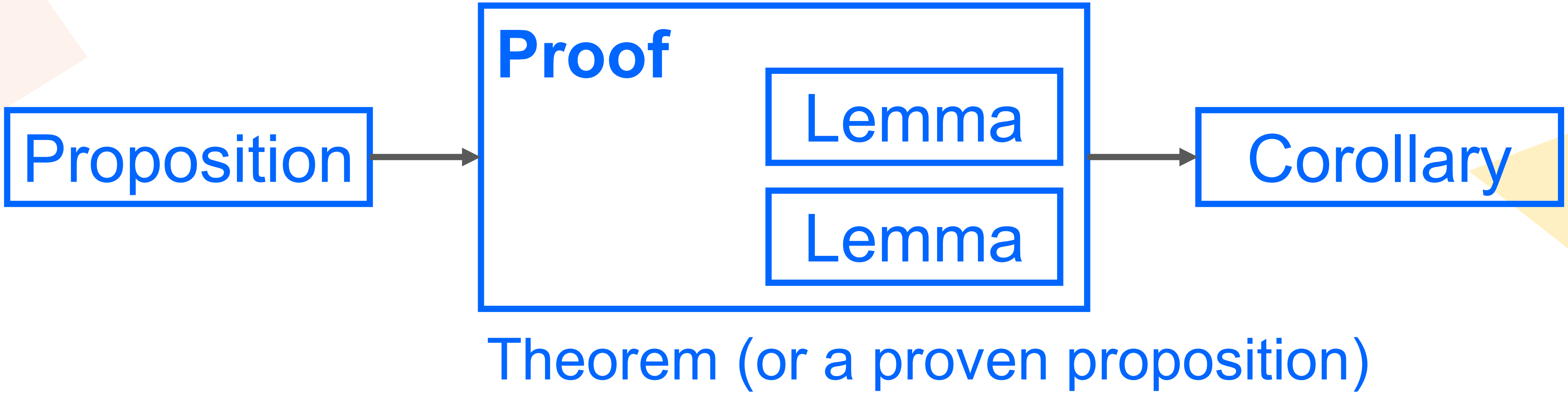
# Review

在開始之前，我們需要大量接觸不同的定理推導與證明，所以在此我們先複習一下，有關公理(Axiom)、定理(Theorem)、命題(Proposition)、係理(Corollary)、引理(Lemma)的差異。

1) 公理(Axiom): 不需要證明的敘述(statement)。
2) 定理(Theorem): 被嚴謹數學推導證明的數學敘述，通常為最重要研究結果。
3) 命題(Proposition): 被證明或常見研究結果，但重要性比定理稍低。
4) 引理(Lemma): 通常是次要結果，其目的用來幫忙證明定理之用。
5) 推論(Corollary): 簡易證明的結果，通常是強烈依據定理得出的結果。

# Review

• 因此，我們可以圖像化呈現為:



# Introduction

- 在機率的概念中，我們需要知道A事件發生的機率，就需要先知道全部事件有多少種可能性。

$$P(A) = \frac{\#A}{\#All}$$

where $\#A$ is the number of A events and $\#All$ is the total events.

- 因此這個章節主要在計算全部事件有多少種可能性；說的直白一點，其實就與高中所提到的排列組合很相似。不同的地方是，在大學的課程中，我們會推導一些排列組合相關的定理。

# Counting Principle

- 如果我們今天做了m個實驗，每個實驗可以產生n種結果。那麼最後我們總共會有的m × n種實驗結果。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1,1 | 1,2 | … | 1,n |
| 2,1 | 2,2 | … | 2,n |
| ⋮ | ⋮ | ⋱ | ⋮ |
| m,1 | m,2 | … | m,n |

# Counting Principle

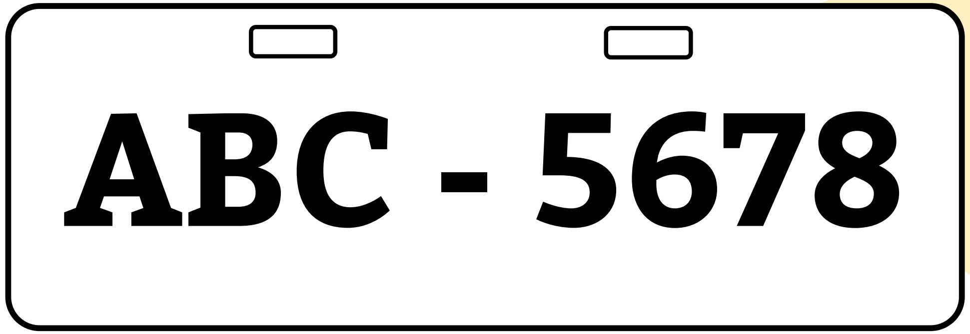
## 範例一

- 今天我們有一筆資金要進行股票投資，結合不同的參數進行電腦模擬以降低投資風險，假設目前適合的股票投資標的有10種。
- 對於每一個投資標的，電腦模擬縮需要考慮的參數有:
  - 參考3種美股大盤指數
  - 參考2種台股大盤指數
  - 參考5種相關期貨指數
- 試問電腦模擬結果會有幾種?

# Counting Principle

## 範例二

- 目前臺灣自小客車車牌的號碼規則為:
  - 前三碼為英文字母
  - 後四碼為數字
- 假設有下列規則的車牌號碼必須排除
  - 任兩個4相連必須排除
  - 超過三個4也必須排除
- 請問有幾組可以發的車牌?



# Permutations

- 延續前一小節，在此我們要介紹Permutations(排列；置換)；簡單的說，就是我們更需要考慮東西排列的順序，意即不同順序代表不同的意義。其實就跟高中時我們所學到的排序是一樣的，譬如說: 今天我們有三個英文字母: A、B、C，請問可以有幾種排列方式。

  ABC、ACB、BCA、BAC、CAB、CBA

- 在計算的角度來看，第一個字母有三個位置可以選，第二個字母就剩兩個位置，第三個字母就是選剩的位子，也就是

  $3 \times 2 \times 1 = 6 \rightarrow 3!$

# Permutations

- 因此，今天有n個物品要進行排列的時候；有幾種排列方式就可以帶入此公式

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

- 高中的時候，我們用的符號是P!。其中，P所代表的就是permutations；而後面的驚嘆號所代表的就是階乘(factorial)。因此在許多程式語言中，就可以利用factorial(n)來計算n階乘的結果。

# Permutations

## 範例三

- 假設你今天是二手車場的倉管，目前擁有的廠牌數量如下:
  - 賓士: 3台
  - 保時捷: 5台
  - 豐田汽車: 4台

1) 若不考慮不同廠牌，將所有車子直接排列，請問有幾種排列方式?
2) 若同一種廠牌的車子放在一起，請問有幾種排列方式?
3) 若同一種廠牌的車子皆是為同樣一台車，請問有幾種排列方式?

# Combinations

- 組合(combinations)是來計算有幾種組合方式；這一部分也跟高中所提到的很相似。

**範例四**

- 假如今天我們有1-50號的球，都放在一個袋子中，任取兩顆球的組合有幾種?

$$C_2^{50} = \frac{50 \times 49}{2 \times 1} = 25 \times 49 = 1225\text{種}$$

其中的C就是代表combination的意思。

$$C_r^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

# Combinations

- 在大學的機率與統計中，我們利用一個新的符號來表示

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}，r \leq n$$

**範例五**

- 假設今天有兩批不同的風力發電機共有n個，第一批的風電機是可以接受高風速有m個；第二批只能接受低風速有n-m個。為了最大化風力發電的發電量，需要將這兩種風電機交互排列，將高風速安插在低風速之間，請問有幾種組合方式?

(假設: 同種風速的風機是一樣的)

# Combinations

- 在這裡我們有提及combination中，一個很重要的性質:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

- 假設我們今天一定要從n個物品裡面，選擇某一指定物品，所以我們需要在從n-1個物品中，再選擇r-1個物品(因為已選擇某一指定物品，所以需要選擇的物品數就變成r-1個)。
- 另一個情況就是我確定不選擇某一指定物品，那我就需要再n-1個物品中，選擇r個物品出來，也就是第二項。
- 這個性質很重要，因為這個性質說明了二項式定理(the binomial theorem)。

# Combinations

- The Binomial Theorem (二項式定理)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = x + y$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

# Combinations

- Proof of the Binomial Theorem by Induction

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

when $n=1$,

$$x + y = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = y + x$$

# Combinations

- Proof of the Binomial Theorem by Induction

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

assume for $n-1$,

$$\begin{aligned}
&(x+y)^n \\
&= (x+y)(x+y)^{n-1} \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k}
\end{aligned}$$

# Combinations

$Let\ i\ =\ k+1\ for\ the\ first\ term\ and\ i=k\ for\ the\ second$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} x^i y^{n-i}} + \boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i y^{n-i}}$$

$i = n$ $\qquad$ $i = 0$

$$= x^n + y^n + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}\right] x^i y^{n-i}$$

$$= x^n + y^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

# Combinations

- Combinatorial Proof of the Binomial Theorem

  我們將$(x+y)^n$展開，並假設每個$x$與$y$都不同的情況下，

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3)\cdots(x_n+y_n)$$

  每一項有2個變數，因為有$n$次方，所以總共有$2^n$個項。

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)=x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2$$

  所以總共有$2^n$個項，對於每個項，我們分別要在$x$中取$k$個出來，在$y$中取$(n-k)$個，所以對於每個組合會出現的次數為$\binom{n}{k}$個。

  故我們可得出$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$。

# Multinomial Coefficient

**[Preview] 可參考**Sheldon Ross [A First of Course in Probability 8th] pp.9

如果我們今天有$n$個物品，要拆成$r$個group，每個group的大小為$n_r$個物品，且所有group的物品總數會等於原來的總數$n$ 。

因此，對於第一個group的組合有$\binom{n}{n_1}$種，當到第二個group的時候，因為物品總數已經被取走$n_1$個，所以組合數有$\binom{n-n_1}{n_2}$種。

所以一直到第$r$個group之後，總共會有

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$

# Multinomial Coefficient

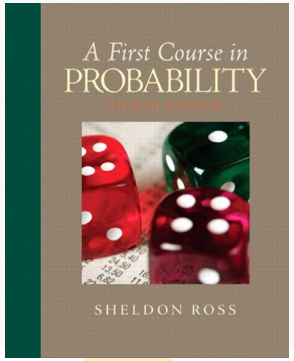
$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$

$$=\frac{n!}{(n-n_1)!\,n_1!}\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!\,n_2!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{\boxed{0!}\,n_r!}$$

$$=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

0! = 1

# [#2] Assignment




- Selected Problems from Sheldon Ross Textbook [1].

**1. (a)** How many different 7-place license plates are possible if the first 2 places are for letters and the other 5 for numbers?

**(b)** Repeat part (a) under the assumption that no letter or number can be repeated in a single license plate.

**7. (a)** In how many ways can 3 boys and 3 girls sit in a row?

**(b)** In how many ways can 3 boys and 3 girls sit in a row if the boys and the girls are each to sit together?

**(c)** In how many ways if only the boys must sit together?

**(d)** In how many ways if no two people of the same sex are allowed to sit together?

**10.** In how many ways can 8 people be seated in a row if

**(a)** there are no restrictions on the seating arrangement?

**(b)** persons $A$ and $B$ must sit next to each other?

**(c)** there are 4 men and 4 women and no 2 men or 2 women can sit next to each other?

**(d)** there are 5 men and they must sit next to each other?

**(e)** there are 4 married couples and each couple must sit together?

**11.** In how many ways can 3 novels, 2 mathematics books, and 1 chemistry book be arranged on a bookshelf if

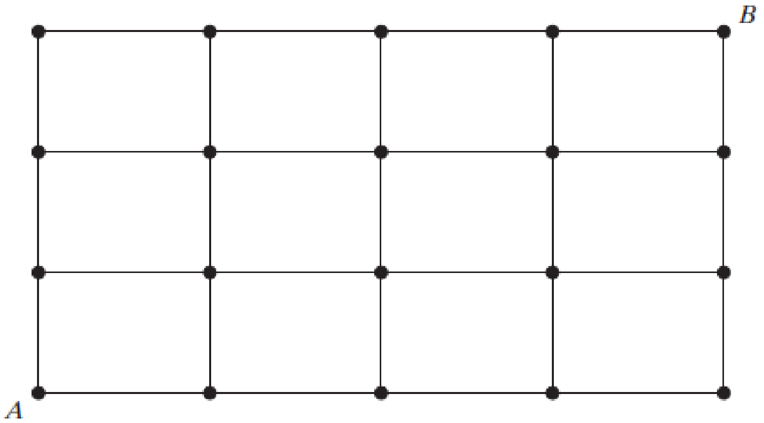
**(a)** the books can be arranged in any order?

**(b)** the mathematics books must be together and the novels must be together?

**(c)** the novels must be together, but the other books can be arranged in any order?

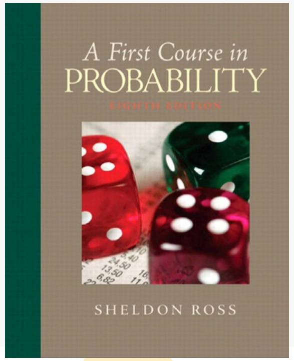
**21.** Consider the grid of points shown here. Suppose that, starting at the point labeled $A$, you can go one step up or one step to the right at each move. This procedure is continued until the point labeled $B$ is reached. How many different paths from $A$ to $B$ are possible?

*Hint*: Note that to reach $B$ from $A$, you must take 4 steps to the right and 3 steps upward.




[1] Sheldon Ross. A First of Course in Probability. 8th edition.

# [#2] Assignment




- Selected Problems from Sheldon Ross Textbook [1].

**7.** Give an analytic proof of Equation (4.1).

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} .$$

Hint: 直接展開$\binom{n-1}{r-1}$與$\binom{n-1}{r}$這兩項，再做合併就可以證明出來!

[1] Sheldon Ross. A First of Course in Probability. 8th edition.

# Question Time

If you have any questions, please do not hesitate to ask me.

# The End

*Thank you for your attention ))*